Академия педагогических наук СССР

Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ

В.Л.Гутенмахер, Н.Б.Васильев

ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРИКУ

(по материалам лекций академика И.М.Гельфанда)

Методические разработки
для учащихся ВЗМШ

Москва - 1989

УДК 37.018.43

Введение в комбинаторику: методические разработки для учащихся ВЗМШ АПН СССР при МГУ (В.Л.Гутенмахер, Н.Б.Васильев – М.: изд. АПН СССР, 40 с.).

Разработки предназначены учащимся Всесоюзной заочной математической школы Академии педагогических наук СССР при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова (ВЗМШ).

В них рассказано о некоторых центральных идеях элементарной комбинаторики. Разобран ряд типичных задач, дано много материала для самостоятельной работы. Приведены контрольные задания и критерии оценок их выполнения.

Рецензенты: С.М.Львовский, кандидат физ-мат наук;
А.Л.Тоом, кандидат физ-мат наук.

Содержание

	стр
Предисловие	3
§1. Включения и исключения	4
§2. Одна комбинаторная задача	13
§3. Геометрическое изображение задачи 2-О и несколько задач о графах	20
§4. Произведения, суммы, расстановки цифр	27
§5. Разные задачи	34
Контрольные задания	40
Критерии оценок	40

Ротапринт НИИОП АПН СССР
120327, Москва, ул. Ленская, 4
Заказ № 143 Тираж 7000

© Академия педагогических наук СССР (АПН СССР), 1989 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

На этих страницах Вы познакомитесь с несколькими красивыми математическими идеями.

С комбинациями различных объектов, действий над ними и т.п. мы сталкиваемся на каждом шагу. Основной задачей области математики, называемой комбинаторикой, можно считать задачу размещения объектов по специальным правилам и нахождения числа способов таких размещений.

Наша цель – познакомить читателя с основными приемами подсчета различных вариантов (среди них – формула "включений и исключений","правило произведения") и с важными понятиями, постоянно используемыми в комбинаторике ("взаимнооднозначное соответствие", "разбиение на классы").

Текст разбит на пять параграфов. Задачи первого параграфа учат наглядно изображать условие задачи, переводить его на"язык множеств" и приводят читателя к важной формуле "включений и исключений".

Второй параграф касается, в основном, только одной задачи: сколько существует целых положительных K-значных чисел, цифры которых в десятичной записи расположены в убывающем порядке ? Путь к ее решению состоит в том, чтобы разобраться в условии для небольших значений K и разбить задачу на более простые.

Третий параграф начинается с новой, геометрической интерпретации первой задачи из §2. Далее он продолжается задачами, условия которых удобно изображать в виде "графов" (т.е. комбинациями точек и соединяющих их дуг).

Параграф четвертый – новые вариации на тему, начатую в §2, и их обобщения.

В конце каждого из этих параграфов приведено заключение, обобщающее материал, изложенный в тексте.

В пятом параграфе помещены разные задачи. Комбинаторика – один из тех разделов математики, где почти сразу возникают трудные и даже нерешенные вопросы (см. с.38 – 39).

Ваше задание состоит в том, чтобы внимательно проработать текст пособия, обращая внимание на образцы записи решений, приведенные в нем. При выполнении контрольной работы полезно следовать этим образцам.

Тем из Вас, кто еще этого не сделал, мы советуем подписаться

на журнал "Квант", в котором помещается много материалов по математике и физике. Подписной индекс 70465.

§ I. Включения и исключения.

Этот параграф состоит из нескольких задач, которые приведут нас к важной формуле "включений и исключений".

Сначала небольшая"разминка" - совсем простые упражнения.

Упражнение I-0. Сколько существует целых положительных чисел, меньших I00, которые делятся:
а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 6?

Ответы: а) 49 (так как 99 = 2·49 + I);
б) 33 (так как 99 = 3·33);
в) I9 (так как 99 = 5·I9 + 4);
г) I6 (так как 99 = 6·I6 + 3).

Контрольное упражнение I-I. Сколько существует целых положительных чисел, меньших I000, которые делятся:
а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 7?
Эти упражнения помогут нам в решении следующих задач.

Задача I-2. Сколько существует целых положительных чисел, меньших I00, которые:
а) делятся одновременно на 2 и на 3;
б) делятся на 2, но не делятся на 3;
в) делятся на 3, но не делятся на 2;
г) делятся на 3 или на 2;
д) не делятся ни на 2, ни на 3?

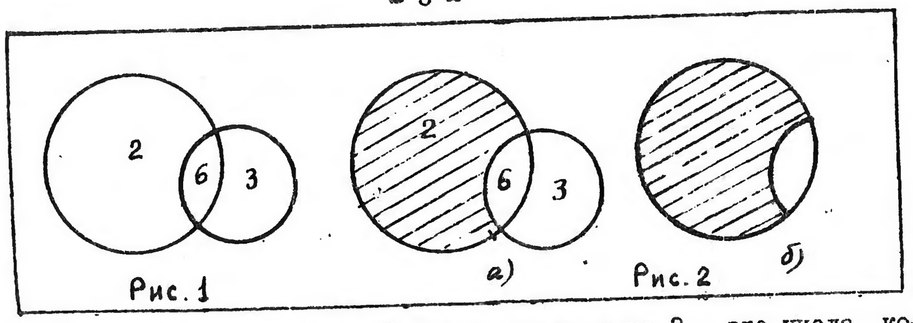
Ответы: а) I6, б) 33, в) I7, г) 66, д) 33.

Решение задачи I-2а). Числа, которые делятся и на 2, и на 3, - это числа, которые делятся на 6. Количество таких чисел мы подсчитали в упражнении I-0 г).

Решение задачи I-2 б). Для наглядности ситуацию можно изобразить двумя пересекающимися кругами (см.рис.I).

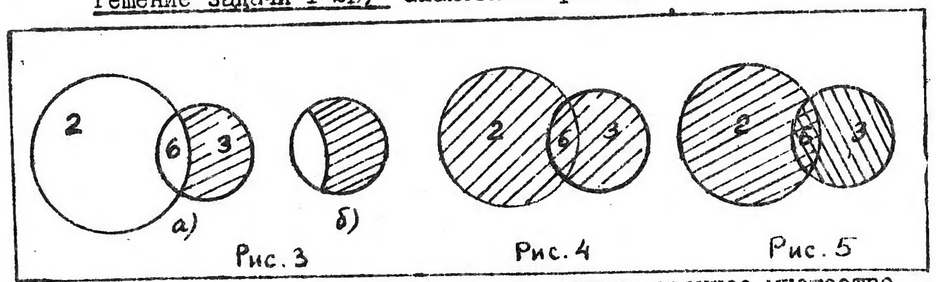
В первом круге-множество чисел, которые делятся на 3, во втором - множество чисел, которые делятся на 2, а их пересечение (общая часть) - множество чисел, которые делятся на 6.

Нам нужны числа, которые делятся на 2, но не делятся на 3.



Числа, которые делятся на 2, но не делятся на 3 - это числа, которые делятся на 2, но не делятся на 6. На рисунках 2а) и 2б) мы заштриховали нужное множество чисел. Очевидно, их количество равно 49 - I6 = 33 (из 49 чисел, делящихся на 2, I6 делятся на 6).

Решение задачи I-2в) аналогично решению б),



только в этом случае нам нужно другое заштрихованное множество (см.рис.3а) и 3б)).

Решение задачи I-2г). В этом случае мы также заштрихуем нужное нам множество. Это - объединение двух кругов (см.рис.4).

Если сложить количество чисел, которые делятся на 3, с количеством чисел, которые делятся на 2, то мы при этом два раза посчитаем числа, которые делятся на 6 (см.рис.5). Таким образом, от полученной суммы нам еще надо отнять количество чисел, которые делятся на 6.

Итак, ответ: 33 + 49 - I6 = 66.

Решение задачи I-2д). Изобразим ситуацию в виде диаграммы (см.рис.6). Квадрат - это множество всех целых положительных чисел, меньших I00, а круги - это множества чисел, делящихся на 2 и на 3. Нужное нам количество чисел заштриховано на рис.6. Количество таких чисел будет равно количеству чисел, находящихся в дополнении к объединению двух кругов. Сколько чисел в объеди-

нении двух кругов, мы уже подсчитали в задаче г).

Ответ. 99 - 66 = 33.

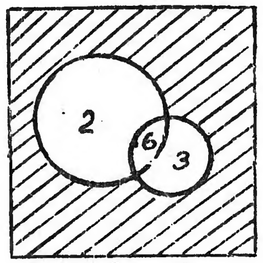


Рис. 6

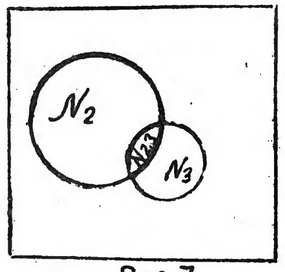


Рис 7

Обозначим через N количество всех чисел, меньших 100, через N_2, N_3, $N_{2\cdot3}$ – соответственно количества чисел, которые делятся на 2, делятся на 3, делятся на $2\cdot3$, а через N' – количество чисел, которые не попадают ни в N_2, ни в N_3. Тогда из наших рассуждений мы получим формулу

$$N' = N - N_2 - N_3 + N_{2\cdot3}.$$

Контрольная задача I – 3. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые:

а) делятся и на 2, и на 3;

б) делятся на 2, но не делятся на 3;

в) делятся на 3, но не делятся на 2;

г) делятся на 3 или на 2;

д) не делятся ни на 2, ни на 3?

Более сложные задачи получатся, если мы возьмем три числа, например, 2, 3, 5.

Задача I-4. Сколько целых положительных чисел, меньших 100, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

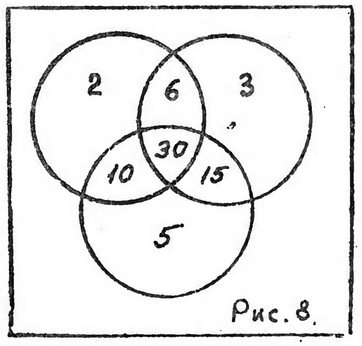


Рис. 8.

Решение задачи I-4. Заметим, во-первых, что если число делится и на 2, и на 5, то оно делится на 10; если оно делится и на 3, и на 5, то оно делится на 15, а если еще и на 2, то оно делится на 30. Изобразим ситуацию в виде диаграммы (см.рис.8), где внутри квадрата – множество чисел, меньших 100, а в кружках – соответственно множества

чисел, которые делятся на 2, на 3, на 5.

Пусть N_2 – количество чисел, которые делятся на 2, N_3 – количество чисел, которые делятся на 3, N_5 – количество чисел, которые делятся на 5. $N_{2\cdot3}$ – делящиеся и на 2, и на 3, $N_{3\cdot5}$ – делящиеся и на 3, и на 5. Наконец, $N_{2\cdot3\cdot5}$ – количество чисел, которые делятся и на 2, и на 3, и на 5, а N' – количество чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Оказывается, верна следующая формула:

$$N' = N - N_2 - N_3 - N_5 + N_{2\cdot3} + N_{2\cdot5} + N_{3\cdot5} - N_{2\cdot3\cdot5} \quad (*)$$

Все числа, которые стоят в правой части равенства, легко посчитать:

$N = 99$, $N_2 = 49$, $N_3 = 33$, $N_5 = 19$, $N_{2\cdot3} = N_6 = 16$, $N_{3\cdot5} = N_{15} = 6$, $N_{2\cdot3\cdot5} = 3$.

По формуле (*) мы получаем нужное нам число $N' = 26$. Осталось доказать формулу (*).

Мы должны посчитать, сколько чисел содержится в квадрате, но не попадает ни в один из кругов. Если мы вычтем из N сумму $N_2 + N_3 + N_5$, то числа, попавшие ровно в два из трех кругов, мы вычтем два раза, а числа, попавшие во все три круга – даже три раза. Теперь к разности $N - N_2 - N_3 - N_5$ добавим сумму $N_{2\cdot3} + N_{3\cdot5} + N_{2\cdot5}$. Тогда все числа, попадающие в один или два круга, мы учли правильно и только числа, попадающие во все три круга – неправильно: их количество мы трижды вычли и вновь трижды добавили. Придется из суммы $N - N_2 - N_3 - N_5 + N_{2\cdot3} + N_{3\cdot5} + N_{2\cdot5}$ вычесть еще $N_{2\cdot3\cdot5}$. Теперь все числа, входящие в объединение трех кругов, мы учли по разу и пришли к формуле (*).

Задача I-5. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Задача I-6. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11?

Указание к задаче I-6. $N' = N - N_3 - N_5 - N_7 - N_{11} + N_{3\cdot5} + N_{3\cdot7} + N_{5\cdot7} + N_{3\cdot11} + N_{5\cdot11} + N_{7\cdot11} - N_{3\cdot5\cdot7} - N_{3\cdot5\cdot11} - N_{3\cdot7\cdot11} - N_{5\cdot7\cdot11} + N_{3\cdot5\cdot7\cdot11}$ (**).

Чисел, меньших 1000 и делящихся на $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, не существует (как Вы думаете, почему?) Поэтому $N_{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = 0$

Еще три контрольные задачи к § 1.

Задача 1-7. Объединение множества A и B состоит из 25 элементов, пересечение – из 10 элементов. Сколько элементов в A, если в B :

а) 15 элементов; б) 21 элемент; в) 10 элементов?

Задача 1-8. В школьной химической олимпиаде участвовали 21 человек, в физической – 26 человек, в математической – 29 человек. 14 школьников принимали участие и в химической, и в математической, 15 учащихся – и в физической, и в математической, 8 – во всех трех олимпиадах. Сколько школьников участвовали хотя бы в одной из трех олимпиад? Найти все возможные ответы.

Задача 1-9. У меня трое друзей. За месяц с каждым из них я обедал 9 раз, с каждыми двумя из них – 4 раза, со всеми тремя – 1 раз, без каждого из них – 15 раз.

а) Сколько всего раз я обедал?

б) Сколько раз я обедал один?

Заключение.

Формулы (ж) и (жж), которыми мы пользовались выше, являются частными случаями общей формулы – так называемой "формулы включений и исключений". Она связывает такие числа: N – количество элементов некоторого множества A; $N_1, N_2, N_3, \ldots$ – количества элементов в некоторых его подмножествах $A_1, A_2, A_3, \ldots$; $N_{12}, N_{13}, \ldots$ – количества элементов в попарных пересечениях этих множеств: A_1 и A_2, A_1 и A_3, ...; $N_{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$ – количества элементов в пересечениях этих множеств по три, и так далее; наконец, N' – количество элементов множества A, которые не входят ни в одно из подмножеств A_1, A_2, A_3, ... Тогда, как можно доказать,

$$N' = N - N_1 - N_2 - N_3 - \ldots + N_{12} + N_{13} + \ldots - N_{123} \ldots$$

(это и есть общая "формула включений и исключений"). Например, когда подмножеств одно, два и три, она принимает такой вид:

$$N' = N - N_1 .$$

$$N' = N - N_1 - N_2 + N_{12} .$$

$$N' = N - N_1 - N_2 - N_3 + N_{12} + N_{23} + N_{13} - N_{123} .$$

Формула "включений и исключений" относится к алгебре множеств. Подобно операциям над числами – сложению, вычитанию, умножению – можно определить операции над множествами, позволяющие из данных множеств получать новые. Между ними выполняются некоторые соотношения (тождества), напоминающие законы арифметических действий. Мы коротко познакомимся сейчас с основными обозначениями для операций над множествами и свойствами этих операций. Такое знакомство полезно, поскольку язык теории множеств служит основой всей современной математики. В комбинаторике мы занимаемся конечными множествами, а в других разделах математики имеем дело и с бесконечными множествами (чисел, точек и т.п.).

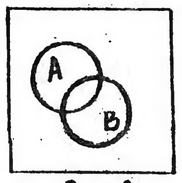


Рис. 9

Будем считать, что все элементы рассматриваемых нами множеств мы берем из некоторого одного и того же "универсального" множества Д (рис.9); как и выше, это множество мы изображаем квадратом, а рассматриваемые нами множества А, В, ... – подмножества множества Д – кругами (или другими полученными из них фигурами, которые мы выделяем штриховкой).

Приведем список основных операций над множествами (их обозначения и названия).

$A \cup B$ – объединение А и В (рис.10);

$A \cap B$ – пересечение А и В (их общая часть, рис.11);

$A \setminus B$ – разность А и В (множество элементов А, не принадлежащих В – рис.12);

$\bar{A}$ – дополнение множества А (до множества Д: $\bar{A} = \mathcal{D} \setminus A$; рис.13).

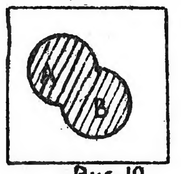


Рис. 10

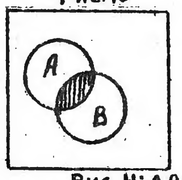


Рис. 11: $A \cap B$

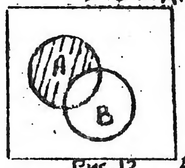


Рис. 12 $A \setminus B$

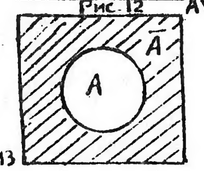


Рис. 13

Когда речь идет о множествах, запись $A = B$ означает, что А и В совпадают, то есть состоят из одних и тех же элементов.

Заодно упомянем и такие стандартные обозначения:

$a \in A$, то есть a принадлежит множеству А (является элементом А);

$A \subset B$, то есть А содержится в В (А – подмножество В, иначе: всякий элемент В является элементом А).

Когда речь идет о каком-то свойстве элементов множества Д,

удобно рассмотреть множество всех элементов, обладающих этим свойством. Тогда различным логическим комбинациям двух или нескольких свойств, которые выражаются в обычной речи с помощью союзов "и" и "или" и частицы "не", будут соответствовать операции над множествами.

Пусть α и β – два некоторых свойства, А и В – соответствующие им множества (скажем, Д – множество чисел от I до I00, А – множество четных чисел от I до I00, В – множество чисел от I до I00, кратных числу 3). Тогда множество элементов Д, для которых:

выполнены оба свойства, α и β – это пересечение $A \cap B$;

выполнено хотя бы одно из них, α или β – это $A \cup B$;

выполнено A, но не выполнено B – это разность $A \setminus B$;

выполнено ровно одно из них, либо α, либо β – это $A \cup B \setminus (A \cap B)$ (так называемая "симметрическая разность" А и В – рис.I4);

не выполнено α (то есть "выполнено не α") – это $\bar{A} = \mathcal{D} \setminus A$.

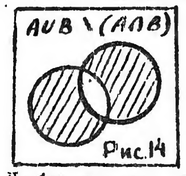


Рис.I4

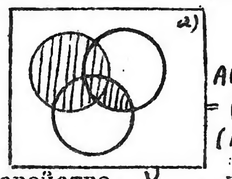


Рис.I5

Добавим еще одно свойство, γ, и соответствующее ему множество С. Пусть нас интересуют элементы Д, для которых выполнено свойство α или оба свойства, β и γ. Они образуют множество, заштрихованное на рис.I5а. Это множество можно записать так: $A \cup (B \cap C)$. Заметим, что то же самое множество можно получить и иначе: оно равно $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (на рис.I5б множество $A \cup B$ заштриховано в одном направлении, а $A \cup C$ – в другом, так что пересечение этих двух множеств заштриховано дважды).

Итак, для любых множеств А, В и С выполнено такое равенство:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Его можно назвать дистрибутивностью (точнее, дистрибутивностью объединения множеств по отношению к пересечению: для этих операций верен и другой закон дистрибутивности – см. ниже задачу I-II).

Иногда объединение множеств называют "сложением", а пересечение – "умножением"; некоторые законы этих операций действительно похожи; в частности, законы коммутативности и ассоциативности выполнены и для пересечения, и для объединения: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Кстати, из последних равенств вытекает, что выражение $A \cup B \cup C$ (или $A \cap B \cap C$) можно писать без скобок – точно так же, как для

чисел: $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 2 + 3 + 4$; $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 3 \cdot 4$. Далее мы предлагаем Вам несколько упражнений. Надо привести наглядные доказательства следующих равенств.

I-I0. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения. Здесь можно провести аналогию с умножением: $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$.

I-II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность). Сравните с равенством $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$.

I-I2. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$. Сравните с неверным равенством $(5 - 3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 - 3$.

I-I3. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$. Сравните с верным равенством $(5 - 3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2$.

I-I4. Запишите формулами (выразите через А, В и С) множества, заштрихованные на рис.I6.

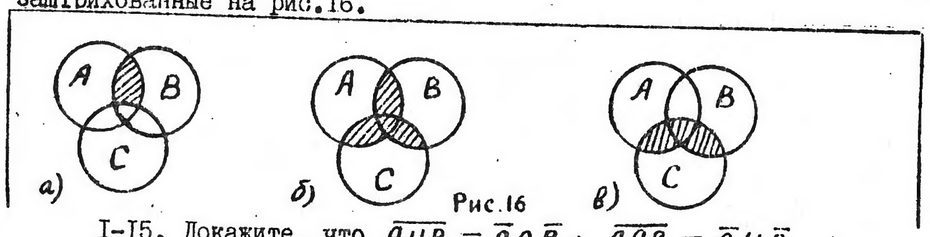


Рис.I6

I-I5. Докажите, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. заштриховав соответствующие множества на рисунке.

Равенства задачи I-I5 показывают наличие своеобразной "двойственности" (симметрии) между операциями пересечения и объединения множеств. Заметим, что такой симметрии между сложением и умножением чисел нет, так что аналогия между операциями над числами и над множествами далеко не полная. Скажем, у множеств, как мы видели, есть два закона дистрибутивности, а у чисел дистрибутивности сложения относительно умножения, конечно, нет: $2 + 3 \cdot 4 \neq (2 + 3) \cdot (2 + 4)$.

* * *

Используя язык теории множеств в решении задач, надо внимательно следить за тем, чтобы не ошибиться при "переводе" условия задачи на точный математический язык. В обычной речи союзы "и", "или" (или аналогичные им по смыслу слова) далеко не всегда имеют смысл "пересечения" и "объединения", и тут возможны разночтения. Вот, например, что произошло, когда однажды задачу I-9 предложили решать ученикам заочной школы. Мы имели в виду, что условие задачи будет понято так.

Решение Вити Г. Если изображать все множество обедов в виде квадрата Д, а множества обедов с первым, вторым и третьим другом соответственно в виде кругов A_1, A_2, A_3, то по условию:

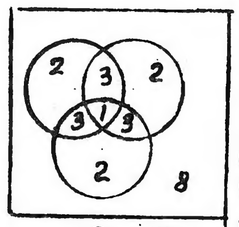


Рис. 17

(I) в каждом круге A_i содержится 9 элементов;
(2) в каждом попарном пересечении $A_i \cap A_j$ – 4 элемента;
(3) в пересечении $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ – I элемент;
(4) в дополнении каждого круга $\overline{A_i}$ – I5 элементов.
Отсюда следует, что количество элементов в Д равно 9 + I5 = 24, а в дополнении к объединению трех кругов, как можно найти по формуле "включений и исключений",

$$N' = 24 - 9 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 1 = 8 .$$

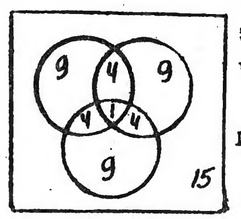


Рис. 18

элементов – именно столько обедов я провел в одиночестве – см. рис.I7.

Но в работах учеников мы увидели, наряду с этим, и другие решения; вот некоторые из них.

Автор	Всего обедов	В одиночестве
Сережа С.	I6	0
Маша И.	3I	I5
Коля В.	55	I5
Витя Г.	24	8

Сережа и Маша поняли условия (I)–(3) так же, как Витя, а условие (4) иначе.

Сережа считал, что "без каждого из них" – это $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$, то есть всего обедов было I6. Тогда по формуле получается

$$N' = 16 - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 4 - 1 = 0,$$

то есть Сережа никогда не обедал один.

Маша решила, что "без каждого из них" – это $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$, тогда $N' =$ I5 и I5 $= N - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 4 - 1$, то есть $N = 31$.

А Коля условие (4) понял так же, как Маша, но и про условия (I)–(3) решил, что они относятся к отдельным "долькам", на которые квадрат Д разрезан окружностями (рис.I8), поэтому у него вышло, что $N' =$ I5 и $N = 15 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 1 = 55$ – почти каждый день два обеда

В случае сомнений нужно специально уточнять, как Вы понимаете условие.

Чтобы по возможности избегать подобных недоразумений, мы старались ограничиваться задачами о числах, точках, цифрах, отрезках, но и здесь иногда бывают неясности.

Например, в следующих параграфах мы часто используем такое "правило произведения": если множество А состоит из K элементов, а множество В – из m элементов, то можно образовать всего (Km) пар $(a; b)$, где $a \in A$, $b \in B$. (Множество таких пар обозначается $A \times B$ и называется произведением множеств А и В.) Так, если А – это класс из 30 учеников, то пару (комсорг; староста) в нем можно выбрать 30·30 = 900 способами. Но пару учеников для игры в пинг-понг можно выбрать лишь (30·29)/2 = 435 способами: ведь в этом случае естественно считать, что пары $(a; b)$ и $(b; a)$ неразличимы, и уж, конечно, $a \neq b$.

§ 2. Одна комбинаторная задача

Этот параграф касается, в основном, только одной задачи: сколько существует целых положительных K-значных чисел, цифры которых расположены в убывающем порядке?

Это – трудная задача. Наш путь решения будет таким. Мы сначала разберемся в условии задачи для $K = 2, 3$ и разобьем задачу на более простые, а уже затем перейдем к следующим значениям $K = 4, 5 \ldots$

Итак, начнем наш путь "от простого к сложному".

Задача 2-0а). Сколько существует двузначных чисел*) с убывающим порядком цифр?

б) Сколько существует чисел, меньших I00, цифры которых идут в возрастающем порядке?

в) Тот же вопрос для чисел, цифры которых идут в невозрастающем порядке.

г) Сколько существует двузначных чисел с невозрастающим порядком цифр (то есть таких, у которых вторая цифра не больше первой)?

Решение задачи 2-0а). Первое, что приходит в голову – это выписать все такие числа: 98, 97, 90, 87, 86,...80, 76,... 70, 65, 60, 54,... I0 и пересчитать их. Мы, конечно, сразу заметим, что в девятом десятке их 9, в восьмом – 8, и т.д., в первом десятке – I число, I0, поэтому нам просто нужно сложить числа

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=?$$

Проще всего их складывать в таком порядке:

$$(9+1) + (8+2) + (7+3) + (6+4) + 5 = ?$$

Ответ: 45 чисел.

Уточнение. Уточним условие задачи 2-0б). Числа, меньшие I00, – это двузначные и однозначные числа. Цифры двузначного числа

*) Подчеркнем еще раз: всюду здесь мы имеем в виду натуральные (положительные целые) числа, записанные в десятичной системе.

идут в возрастающем порядке, если первая цифра меньше второй. Однако неясно, как быть с однозначными числами I, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мы будем считать, что это - тоже числа с возрастающим порядком цифр, хотя это выглядит странно - говорить здесь о возрастающем порядке. Эти же однозначные числа мы будем считать и числами с убывающим порядком цифр. (Такие соглашения часто принимаются в математике). Так что если Вас спросят, бывают ли числа, цифры которых одновременно идут и в возрастающем, и в убывающем порядке, Вы сможете ответить, что это числа I, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Решение задачи 2-0б). Здесь, конечно, можно сделать такой же подсчет, как и в задаче а), однако интереснее действовать иначе. Как мы уже говорили, среди нужных нам чисел есть однозначные и двузначные. Сделаем однозначные числа тоже двузначными, приписав к ним слева нуль:

I=0I, 2=02,... 9=09.

При такой записи мы не перепутаем эти числа ни с какими другими двузначными числами и отнесем их тоже к числам, цифры которых идут в возрастающем порядке (таким образом нумеруются билеты лотереи). Теперь становится ясно, что ответ будет таким же, как в задаче а). В самом деле, если в каждом числе, меньшем I00, с возрастающим порядком цифр поменять цифры местами, то получится двузначное число с убывающим порядком цифр, и наоборот. Итак, ответ: 45 чисел.

Решение задачи 2-0в). К таким числам относятся числа, цифры которых идут в возрастающем порядке, и числа, обе цифры которых одинаковы.

Сколько есть чисел с возрастающим порядком цифр, мы знаем из задачи б) - их 45.

Чисел с одинаковыми цифрами всего 9: II, 22, ... 99. Итого 45 + 9 =54.

Ответ: 54 числа.

Решение задачи 2-0г). К таким числам относятся двузначные числа с убывающим порядком цифр, количество которых мы нашли в задаче 2-0а), и двузначные числа с одинаковыми цифрами, а их всего 9. Итак, получаем 45 + 9 = 54 числа.

Ответ: 54 числа.

Снова решение задачи 2-0а). Используя решения задач б), в) и г), можно решить задачу а) еще более простым подсчетом. Двузначных чисел, включая и числа 0I, 02,..., 09, начинающиеся с нуля, цифры которых различны, всего 90. В самом деле, чисел, меньших I00, всего 99, а чисел, с одинаковыми цифрами, меньших I00, всего 9. Двузначные числа с двумя неодинаковыми цифрами разбиваются на два класса, состоящие из чисел с убывающим порядком цифр и из чисел с возрастающим порядком цифр, причем тех и других поровну. Следовательно, чисел с убывающим порядком цифр всего 90:2=45.

Задача 2-I. Сколько существует восьмизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 2-2. Сколько существует чисел, меньших I00, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 2-3. Сколько существует одиннадцатизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Решение задачи 2-I. Сначала ответ: столько же, сколько двузначных, то есть, 45. Докажем это. Выпишем в строку все десять цифр:

9 8 7 6 5 4 3 2 I 0

Возьмем двузначное число с убывающим порядком цифр и вычеркнем его цифры из этой строки. В результате мы получим восьмизначное число с убывающим порядком цифр, например:

70 → 98~~7~~65432I~~0~~, то есть 9865432I

62 → 987~~6~~543~~2~~I0, то есть 98754[illegible]

Таким образом, каждому двузначному числу с убывающим порядком цифр мы сопоставим одно восьмизначное число с убывающим порядком цифр. Теперь, наоборот, возьмем какое-нибудь восьмизначное число с убывающим порядком цифр. Вычеркивая его цифры из строки 98765432I0, мы получим двузначное число с убывающим порядком цифр, например,

9876432I → ~~98765432I0~~, то есть 50.

Таким образом, каждому восьмизначному числу мы сопоставили одно двузначное число. Очевидно, что и в первом, и во втором случае двум разным числам соответствуют два разных числа. Тем самым мы установили взаимнооднозначное соответствие между дву-

значными и восьмизначными числами с убывающим порядком цифр. Следовательно, и тех, и других одинаковое количество.

Решение задачи 2-2. Числа, меньшие I00, с убывающим порядком цифр могут быть двузначными и однозначными. Количество таких двузначных чисел мы нашли в задаче 2-0а) - их 45. В уточнении условия задачи 2-0б) мы договорились, что все однозначные числа-I, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-тоже удовлетворяют условию задачи 2-2. Итого: 45+9=54.

Ответ: 54 числа.

Еще одно решение задачи 2-2. Эту задачу можно решить иначе. Новое решение, похожее на решение задачи 2-I, объяснит, почему ответ в этой задаче такой же, как в задаче 2-0г).

Дополним однозначные числа, удовлетворяющие условию задачи 2-2, согласно уточнению условия на стр. 13 , до двузначных, приписав к ним ту же цифру:

I → II, 2 → 22, ..., 9 → 99.

Тем самым каждому числу, меньшему I00, с убывающим порядком цифр мы сопоставили двузначное число с невозрастающим порядком цифр.

Наоборот, возьмем какое-нибудь двузначное число с невозрастающим порядком цифр. Если его цифры одинаковы, вычеркнем одну из них, а если разные - оставим все, как есть. Тем самым однозначному числу с невозрастающим порядком цифр мы сопоставили число, меньшее I00, с убывающим порядком цифр. Мы установили взаимнооднозначное соответствие между числами из задачи 2-2 и 2-0г). Следовательно, тех и других поровну.

Решение задачи 2-3. Сначала ответ: таких чисел нет. В самом деле, у такого числа все II цифр должны быть разными, но различных цифр всего I0.

Задача 2-4а). Сколько существует двузначных чисел с убывающим порядком цифр, в записи которых нет цифры 0?

б) Сколько существует двузначных чисел с возрастающим порядком цифр?

Решение задач 2-4а), б). Эти задачи похожи на задачу 2-0а), поэтому мы будем решать их аналогично. Двузначных чисел, цифры

которых различны и отличны от нуля, всего 72 (почему?). Они разбиваются на два класса, состоящие из чисел с возрастающим порядком цифр и из чисел с убывающим порядком цифр, причем тех и других поровну (почему?). Следовательно, тех и других по 36.

Ответ: 36 чисел.

Задача 2-5. Сколько существует трехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Решение задачи 2-5.

Трехзначные числа, цифры которых идут в убывающем порядке - это числа, у которых вторая цифра меньше первой, а третья - меньше второй. Следовательно, у таких чисел все цифры разные. Рассмотрим множество чисел, у которых все три цифры разные, причем будем считать, что числа могут начинаться с нуля, как в решении задачи 2-0б). Разобьем их на классы. Если числа состоят из одних и тех же трех цифр и отличаются только порядком, в котором они поставлены, то мы их относим к одному классу. Всякое число, таким образом, попадает только в один из классов.

Покажем теперь, что в каждый класс попадает ровно шесть чисел, и кроме того, среди них есть только одно число, цифры которого идут в убывающем порядке.

Пусть a, b, c - какие-то три разные цифры и пусть $a>b>c$. Тогда из них можно составить только шесть различных чисел: $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$, и из них только у одного числа, $\overline{abc}$, цифры идут в убывающем порядке. Отсюда мы можем заключить, что если N - количество чисел, у которых все три цифры разные, то количество классов, на которые мы их разбили, будет равно $N/6$. Кроме того, поскольку в каждом классе есть только одно число с убывающим порядком цифр, всего таких чисел будет столько же, сколько классов, то есть $N/6$ штук. Осталось найти N, то есть решить следующую задачу.

Вспомогательная задача 2-5а). Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решая задачу 2-0, мы нашли, что двузначных чисел с разными цифрами 90 штук. Приписывая спереди к каждому такому двузначному числу по одной из 8 цифр, не содержащихся в этом числе, мы, очевидно, получим все различные трехзначные числа с разны-

ми цифрами.

Двузначные числа с разными цифрами		Трехзначные числа с разными цифрами
90	0I	20I, 30I, 40I, 50I, 60I, 70I, 80I, 90I
	02	I02, 30I, 40I, 50I, 60I, 70I, 80I, 90I
	....	.....
	I0	2I0, 3I0, 4I0 5I0, 6I0, 7I0, 8I0, 9I0
	I2	0I2, 3I2, 4I2, 5I2, 6I2, 7I2, 8I2, 9I2
	....	.....
	I8	0I8, 2I8, 3I8, 4I8, 5I8, 6I8, 7I8, 9I8
	I9	0I9, 2I9, 3I9, 4I9, 5I9, 6I9, 7I9, 8I9
	.....	.....
	97	097, I97, 297, 397, 497, 597, 697, 897
	98	098, I98, 298, 398, 498, 598, 698, 798

Таким образом, всего чисел с тремя разными цифрами будет

$$90 \cdot 8 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \text{ штук}.$$

Вспомогательная задача решена: мы нашли, что $N = 90 \cdot 8$; разделив N на 6, мы получим ответ задачи 2-5.

Ответ к задаче 2-5: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ чисел.

Контрольные задачи к § 2

Задача 2-6. Сколько существует семизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 2-7. Сколько существует трехзначных чисел, у которых первая цифра больше двух других, а вторая - меньше третьей?

Сообщаем Вам сразу, что ответ в задачах 2-6 и 2-7 такой же, как и в задаче 2-5. Нужно написать убедительное объяснение, почему это так, и тогда не придется считать.

Задача 2-8. Сколько существует четырехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Мы советуем решить и записать решение этой задачи точно так же, как в задаче 2-5. Для этого Вам, конечно, понадобится решить следующие задачи.

Задача 2-8а) (сравните с решением задачи 2-5). Пусть a, b, c, d - какие-то четыре разных цифры. Сколько можно составить из них различных чисел?

Задача 2-8б). Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все четыре цифры разные?

При решении каждой из этих задач мы советуем идти по тому же пути, что и при нахождении числа N в решении вспомогательной задачи 2-5а).

Задача 2-9. Сколько существует шестизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Здесь мы тоже сразу сообщаем Вам, ответ. Он такой же, как и в задаче 2-8. Напишите доказательство этого факта, взяв себе за образец наше решение задачи 2-I.

Задача 2-I0. Сколько существует K-значных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Будем считать, что все числа, меньшие 10^K, имеют K знаков. Ответ к задаче 2-I0 должен быть записан в таком виде:

$\frac{10 \cdot 9}{2}$ = 45 чисел при $K = 2$;

$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ = I20 чисел при $K = 3$;

? чисел при $K = 4$;
? чисел при $K = 5$;
? чисел при $K = 6$;
I20 чисел при $K = 7$;
45 чисел при $K = 8$;
? чисел при $K = 9$;
I число при $K = 10$;
0 чисел при $K = 11$;
? чисел при $K > 11$.

Задача 2-IIа). Сколько существует чисел, меньших I000, с возрастающим порядком цифр?

б) Тот же вопрос для чисел с убывающим порядком цифр.

Задача 2-I2. а) Сколько существует трехзначных чисел с неубывающим порядком цифр (т.е. чисел $\overline{abc}$, где $a \le b \le c$)?

б) Тот же вопрос для чисел с возрастающим порядком цифр.

Задача 2-13а). Сколько существует K -значных чисел, в записи которых нет цифры 0, а цифры идут в убывающем порядке?

б) Сколько существует K -значных чисел с возрастающим порядком цифр?

Задача 2-14. Сколько существует K -значных чисел с возрастающим порядком цифр, в записи которых участвуют только нечетные цифры?

Заключение. При решении задачи 2-5 а)и других мы, по существу, использовали такое "правило произведения": если во множестве A всего M элементов, а во множестве B - K элементов, то всевозможных пар $(a;b)$, где a -элемент A, b -элемент B, существует $N = M \cdot K$. Более общий факт: если элементы какого-то множества C удалось разбить на K классов, $A_1, \ldots, A_K$, причем в каждом классе M элементов, то в множестве C всего $N = M \cdot K$ элементов. Нередко бывает нужно, наоборот, зная N (число элементов) и M (число элементов в каждом классе), найти число классов: $K = N/M$.

§ 3. Геометрическое изображение задачи 2-0 и несколько задач о графах

Вернемся снова к задача 2-0б). Оказывается, что ее можно представить себе геометрически.

Задача 3-0. На плоскости имеются 10 точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

Ответ в этой задаче такой же, как в задаче 2-0б), т.е. 45 отрезков. Для того, чтобы убедиться в этом, занумеруем 10 точек цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Рассмотрим теперь какой-нибудь отрезок с концами в этих точках. В концах отрезка стоят две разные цифры; поставив их в порядке возрастания, мы получим двузначное число. Таким образом, каждому отрезку будет соответствовать двузначное число с возрастающим порядком цифр.

Например, отрезку с концами в точках 2 и 3 соответствует число 23, отрезку с концами в точках 5 и 0 соответствует число 05 и так далее. При таком соответствии двум разным отрезкам соответствуют два разных числа и двум разным числам - два разных отрезка. Следовательно, между числами из задачи 2-0б) и отрезками

из задачи 3-0 установлено взаимнооднозначное соответствие. Отсюда уже можно заключить, что отрезков будет столько же, сколько двузначных чисел, цифры которых идут в возрастающем порядке.

Другое решение задачи 3-0. Итак, на плоскости имеются 10 точек и нужно узнать, сколько существует отрезков с концами в этих точках. Посчитаем концы всех таких отрезков. В каждой точке сходится 9 концов, поэтому всего концов будет $10 \cdot 9$. Но у каждого отрезка 2 конца, следовательно, отрезков будет $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Задача 3-1. На плоскости имеются 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

В следующих задачах полезно переводить условие на язык точек и соединяющих дуг.

Как это сделать, Вы узнаете из решений этих задач. Постарайтесь точно так же написать решения контрольных задач.

Задача 3-2. а). Сколько диагоналей в выпуклом 11-угольнике?

б) В тренировочном турнире участвовали 20 команд, причем между каждыми двумя командами было сыграно по одному матчу. Сколько всего было проведено матчей?

Задача 3-3.а) Можно ли устроить такой тренировочный турнир, чтобы в нем участвовали 11 команд и каждая команда сыграла ровно три матча?

б) Можно ли устроить такой тренировочный турнир, чтобы в нем участвовали 8 команд и каждая команда сыграла ровно три матча?

Задача 3-4. Докажите, что в любой компании, состоящей из 11 человек, найдутся два человека, имеющих одинаковое количество знакомых в этой компании.

Решение задачи 3-2 а). Посчитаем сначала концы всех диагоналей. В каждой вершине сходятся 8 концов диагоналей, так как вершина соединена диагоналями со всеми вершинами, за исключением ее самой и двух соседних вершин. Поскольку всего 11 вершин, то число концов $11 \cdot 8$. У каждой диагонали два конца, поэтому число диагоналей будет в два раза меньше, то есть $\frac{11 \cdot 8}{2} = 44$.

Ответ: 44 диагонали.

Решение задачи 3-2 б). Сопоставим каждой команде точку, при-

чем разным командам – разные точки. Каждому матчу между двумя командами сопоставим дугу, соединяющую две точки, соответствующие этим командам. В результате задача сводится к следующей.

Имеется 20 точек, каждые две из которых соединены одной дугой. Сколько всего проведено дуг?

Посчитаем концы всех дуг. В каждой точке сходится 19 концов, поэтому всего 20·19 концов.

У каждой дуги два конца. Поэтому $\frac{20 \cdot 19}{2}$ = 190 дуг.

Возвращаясь к исходной задаче, получаем

Ответ: всего было проведено 190 матчей.

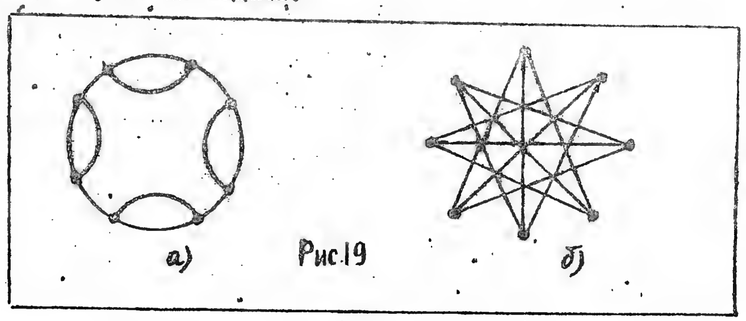
Решение задачи 3-3 а). Снова сопоставим каждой команде точку, причем разным командам – разные точки. Каждые две точки соединены столькими дугами, сколько матчей сыграли соответствующие команды. В результате задача сводится к следующей.

Имеется 11 точек. Можно ли соединить их дугами так, чтобы из каждой точки выходило три дуги?

Посчитаем, какое количество дуг понадобится для этого. Как и раньше, считаем сначала концы дуг. По условию, в каждой точке должно сходиться три конца, поэтому концов должно быть 11·3. Дуг должно быть в два раза меньше, то есть $\frac{11 \cdot 3}{2}$. Стоп! Мы получили не целое число дуг. Такого быть не может и, следовательно, не может быть такого соединения.

Ответ: нельзя устроить.

Решение задачи 3-3 б). Такой турнир устроить можно. Команды будем обозначать точками, а матчи – дугами. На рис.19 приведены два разных примера соединения восьми точек дугами, удовлетворяющего условию задачи.



а) Рис.19 б)

Решение задачи 3-4. Допустим, что есть такая компания из 11 человек, в которой у всех разное число знакомых. Сопоставим каждому человеку число его знакомых. Поскольку всего 11 человек, то каждому человеку может быть сопоставлено только одно из 11 чисел от 0 до 10. Каждым двум должны быть сопоставлены разные числа, поэтому есть человек, у которого 0 знакомых, и есть человек, у которого 10 знакомых. Человек, у которого 10 знакомых, должен быть знаком со всеми остальными, но это противоречит тому, что у одного из них нет знакомых (у того, которому сопоставлено число 0). Таким образом, наше исходное допущение неверно – нет такой компании, и, следовательно, во всякой компании из 11 человек найдутся два человека, имеющие одинаковое количество знакомых.

Контрольные задачи к § 3.

Задача 3-5. а) Сколько диагоналей у выпуклого 50-угольника?

б). Четыре футбольных команды, A, B, C и D, провели друг с другом несколько тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 6 матчах, команда B – в 5, C – в 7, D – в 10. Сколько всего состоялось матчей?

в) Три футбольных команды, A, B и C, провели друг с другом несколько тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 6 матчах, команда B – в 7 матчах, а команда C – в 11 матчах. Сколько матчей сыграли друг с другом команды A и C ?

Задача 3-6. Можно ли устроить такой турнир, чтобы в нем:

а) участвовало 13 команд и каждая команда сыграла ровно 5 матчей;

б) участвовало 10 команд и каждая команда сыграла бы ровно 5 матчей;

в) участвовало 9 команд и каждая команда сыграла бы 4 матча?

Задача 3-7. а) В некоторой компании каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют общих знакомых. Докажите, что в этой компании у каждого человека одинаковое число знакомых.

б) Попробуйте изобразить с помощью точек и соединяющих их дуг такую компанию, которая удовлетворяла бы условиям задачи 3-7а), в которой 16 человек и каждый имеет ровно 5 знакомых.

Задача 3-8. На окружности выбраны 10 точек. Сколько существует выпуклых:

а) четырехугольников; б) пятиугольников; в) восьмиугольников с вершинами в этих точках?

Замечание к задачам 3-5 б) и в). Некоторые ученики записывают решение этих задач так: приводят ответ и "граф", на котором показано, какие команды играли друг с другом и – сколько матчей. Но такое "доказательство" здесь недостаточно: а вдруг из другого рисунка получится другой ответ? Так и получается, если решать этим способом такую, например, задачу.

Задача 3-5 г). Четыре футбольных команды: A, B, C и D провели друг с другом 10 тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 7 матчах, команда B – в 8. Сколько матчей сыграли друг с другом команды C и D?

Решение. Обозначим команды точками, а матчи между ними – соединяющими эти точки дугами.

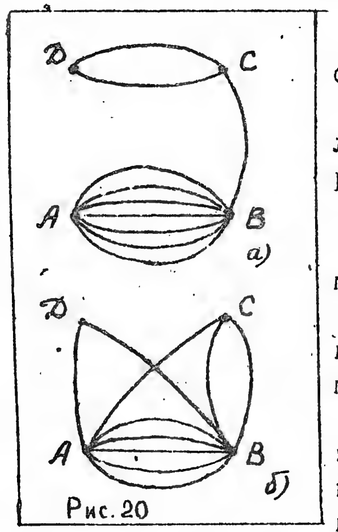


Рис. 20

Возможна картинка 20а, тогда ответ: команды C и D сыграли друг с другом 2 матча.

Однако условию задачи полностью удовлетворяет и ситуация, изображенная на рис.20 б. Получаем (для той же задачи!) другой

ответ: команды C и D не сыграли между собой ни одного матча.

Возможен еще третий (тоже правильный) ответ на вопрос этой задачи. Подумайте сами, какой еще случай возможен.

Вы теперь видите, что для решения задач 3-5 б) и 3-5 в) недостаточно только нарисовать соответствующие графы; нужно провести рассуждение, доказывающее, что ответ может быть только таким. Например, можно записать краткое решение задачи 3-5 г) в таком виде:

"Обозначим число матчей, сыгранных командами X и Y, через n_{XY}. По условию,

$$\begin{cases} n_{AB}+n_{AC}+n_{AD}+n_{BC}+n_{BD}+n_{CD}=10, \\ n_{AB}+n_{BC}+n_{BD}=8, \end{cases}$$

поэтому $n_{CD} \le n_{CD}+n_{AD}+n_{AC}=2$,

то есть n_{CD} может равняться только 0, 1 или 2. Примеры (см.рис. 20 а, б и тот третий, который Вы должны были найти самостоятельно), показывают, что все эти случаи возможны".

Замечание к задаче 3-6. Если в задаче спрашивается "можно ли" или "всегда ли найдется", то возможны два ответа: "да" или "нет". Если Ваш ответ "нельзя" или "всегда найдется", то Вы должны привести полное доказательство, учитывающее все возможные случаи. Если Ваш ответ "можно" (в каком-нибудь случае) или "не всегда", то достаточно привести соответственно подтверждающий или опровергающий пример.

Указание к задаче 3-7 а). Пусть A и B знакомы. Обозначим через M_A множество знакомых A, через M_B – множество знакомых B. Докажите, что:

1) M_A и M_B не имеют общих знакомых;

2) каждый из M_A имеет ровно одного знакомого в M_B;

3) каждый из M_B имеет ровно одного знакомого в M_A.

Отсюда следует, что между M_A и M_B можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Указание к задаче 3-8. Каждое множество из K точек на окружности служит множеством вершин одного выпуклого K-угольника. Если занумеровать точки так, как это сделано в первом решении задачи 3-0, то каждому такому подмножеству можно сопоставить (взаимнооднозначным образом) K-значное число с убывающим порядком цифр.

Заключение. Изображение условия задач с помощью точек и соединяющих их дуг очень часто помогает при решении задач (так же, как наглядное изображение множеств в виде "кругов" пригодилось нам в § 1). Система точек и соединяющих их дуг в математике получила специальное название: граф. С помощью графа можно изобразить ситуацию такого типа: задано некоторое множество A и в нем – некоторое подмножество, состоящее из двух элементов каждое

(множество команд – и пары команд, сыгравших между собой; множество людей – и пара знакомых; множество вершин многоугольника – и пары вершин, соединенных диагоналями, и т.д.).

В решении задач 2-0 а) и 3-0 мы подсчитали число различных подмножеств из двух элементов в множестве A., состоящем из IO цифр: 0, I, 2,.....9 ; это число равно 45. В задаче 2-IO – основной задаче § 2 – мы по существу посчитали количество различных подмножеств из K элементов в этом множестве.В следующем параграфе мы увидим, что эти же числа возникают во многих естественных задачах на подсчет различных вариантов.

Приложение к § 3.

Несколько лет назад две трети всех учащихся I курса ошиблись при решении задач 3-6 б) и 3-6 в). Приведем неверное решение задачи 3-6 б) одной ученицы (назовем её Ниной).

"задача 3-6 б) сводится к такой:

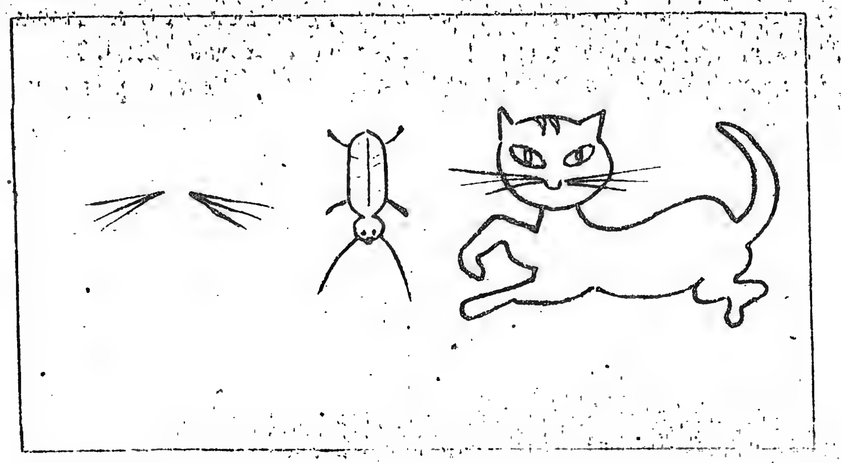
имеется IO точек. Можно ли соединить их дугами так, чтобы из каждой точки выходило 5 дуг?

Дуг должно быть $\frac{IO \cdot 5}{2}$ = 25. Получено целое число дуг – значит можно".

Возразим Нине образно так:

если есть таракан – то есть усы. Но если есть усы, то это еще не значит, что есть таракан.

В этой задаче нужно привести пример: нарисовать нужное соединение.



§ 4. Произведения, суммы, расстановки цифр

Задача 4-I. В выражении $(a+b)^{10}$ проведем возведение в степень и приведем подобные члены. Какие коэффициенты будут стоять при $a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3; a^6b^4, \ldots$?

Указание. $(a+b)^{10}$ – это произведение десяти сомножителей $a+b$. Занумеруем их по порядку так:

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)(a+b)$$

Если из каждой скобки взять букву a, то при умножении мы получим член a^{10}.

Очевидно, что член a^9b получается, когда из одной скобки мы берем букву b, а из остальных – букву a. Поскольку у нас всего десять скобок, то после перемножения мы получим IO слагаемых вида a^9b.

Посчитаем теперь, сколько раз получится член a^8b^2 (это и будет коэффициентом при a^8b^2). Чтобы в произведении получилось восемь раз a и два раза b, нужно из каких-то двух скобок взять букву b, а из остальных – букву a. Запишем номера тех двух скобок, из которых мы выбираем букву b. Получится двузначное число, цифры которого идут в порядке возрастания: (например, если мы взяли букву b из 0-ой и 8-й скобок, то пишем 08). Таким образом, одночлен a^8b^2 при умножении встретится столько раз, сколько существует двузначных чисел, цифры которых идут в возрастающем порядке, т.е. 45 раз (см.§ 2), и поэтому коэффициент при a^8b^2 равен 45. Итак,

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + \ldots \qquad (*)$$

Продолжите наши рассуждения и укажите ответ.

Задача 4-I. а) Чему равна сумма всех коэффициентов (I + IO + 45 + ... + IO + I) в предыдущей задаче?

б) Чему равна сумма коэффициентов при членах с четными степенями a и b:

(I + 45 +... + I) ?

Указание. Подставьте в равенство (*) $a=b=1$ и затем $a=1$, $b=-1$.

Задача 4-2. а) Сколько всего клеток в фигуре, изображенной на рисунке 21?

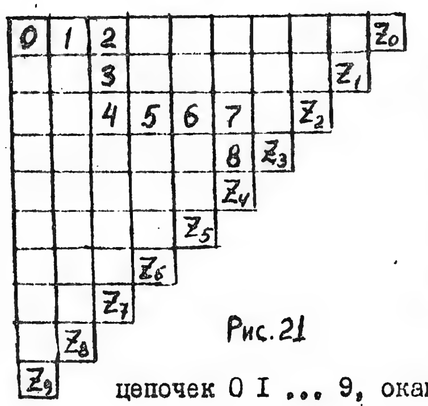


Рис. 21

б) Сколькими способами можно поместить цепочку цифр 0 1 2...9 в эту таблицу так, чтобы каждые две соседние цифры помещались в клетках, имеющих общую сторону, цифра 0 стояла в верхней левой клетке, а цифра 9 – в клетке z_k ($k = 0, 1, 2, \ldots 9$) ?

Указание. Ответ в задаче б) такой же, как в задаче 2-13а):

цепочек 0 1 ... 9, оканчивающихся в z_0 – 1;

— " — " — " — " — в z_1 – 9;

— " — " — " — " — в z_2 –36;

Нужно только обосновать, почему ответ именно такой – тогда не придется считать.

Прежде чем формулировать следующую задачу, введем одно определение. Назовем разбиением целого положительного числа представление его в виде суммы целых положительных чисел.

Вот, например, все разбиения числа 4:

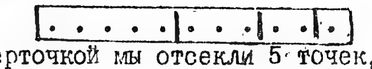
4, 3 + 1, 1 + 3, 2 + 2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1.

Как видно из этого примера, мы считаем разбиения разными, если они отличаются либо числами – слагаемыми, либо порядком, в каком эти числа расположены, либо и тем, и другим. Решим теперь такую задачу.

Задача 4-3. Сколько существует разных разбиений числа 11 на 4 слагаемых?

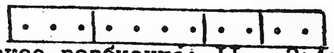
Решение задачи 4-3. Представим себе число 11 в виде 11 точек, расположенных в ряд.

Тогда всякое разбиение этого числа на 4 слагаемых можно отметить тремя черточками. Например, разбиение 11 = 5+3+2+1 можно представить себе так:



Первой черточкой мы отсекли 5 точек, второй черточкой мы отсекли еще 3 точки, третьей – следующие 2 точки, после чего осталась одна точка.

Легко видеть, что и наоборот, расставив каким-нибудь способом 3 черточки между точками, мы зададим разбиение числа 11 на 4 слагаемых. Например, разбиению черточками



соответствует такое разбиение: 11 = 3+4+2+2.

Таким образом, мы видим, что задача 4-3 сводится к следующей задаче.

Вспомогательная задача 4-3 а). Имеются 11 точек, расположенных в ряд. Сколькими способами можно расставить между ними 3 черточки?

Покажем, что эти задачи сводятся к задаче 2-5 из § 2.

В самом деле, поставим между точками цифры

$$\cdot\ 0\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\ \cdot$$

Поставив три черточки, мы отмечаем трехзначное число, цифры которого идут в возрастающем порядке, количество таких чисел равно $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$. Ответ к задаче 4-3: 120 разбиений.

Задача 4-4. Сколькими способами можно разбить число 11 на $(k+1)$ слагаемых (где $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$)?

Указание. Ответ нужно записать так же, как в задаче 2-10, а обосновать – так же, как в задаче 4-3.

Задача 4-5. а) Сколько всего существует выпуклых многоугольников с вершинами в некоторых из 10 данных точек на окружности? (Отрезок или одна точка многоугольником не считается.)

б) Сколько всего существует чисел с убывающим порядком цифр (включая однозначные числа: 0, 1, 2,... 9)?

в) Сколько всего существует подмножеств у множества A из 10 элементов 0, 1, 2,...., 9 (все множество A, а также "пустое" множество также считаются подмножествами A).

Указание. В задачах б) и в) ответ такой же, как в задаче 4-1а). Нужно только это обосновать.

Задача 4-6. Из десяти цифр: 0, 1, 2,...., 9, выбираются 3 цифры и расставляются по кругу. Сколькими способами это можно сделать? (Два способа, отличающиеся только поворотом круга – скажем, такие, как изображены на рисунках 22 а), б), в) – считаются одинаковыми).

Первое решение задачи 4-6. Сначала найдем, сколько способов расставить три разные цифры из десяти в трех кружках (способы,

изображенные на рисунках 22 а) и б), пока считаем разными). Таких способов будет, конечно, столько же, сколько трехзначных чисел с различными цифрами (они могут начинаться и с нуля), то есть 10·9·8. Но так как каждую расстановку цифр по кругу мы посчитали три раза, то расставить три цифры по кругу можно $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3} = 240$ способами.

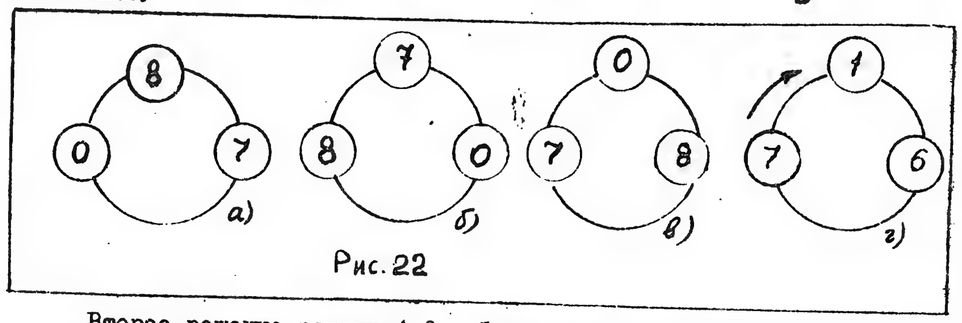


Рис.22

Второе решение задачи 4-6. Здесь мы сразу будем считать такие расстановки, как на рис.22 а), б), в), одинаковыми, не различать их. Поставим каждой расстановке в соответствие трехзначное число следующим образом: сначала запишем наибольшую цифру, а затем по порядку те цифры, которые идут за ней по часовой стрелке. Например, расстановке, изображенной на рис. 22а), б), в) соответствует число 870, а расстановке на рис. 22 г) – 716. Ясно, что мы получим взаимнооднозначное соответствие между такими расстановками и трехзначными числами, у которых первая цифра – самая большая и все цифры различны. Сколько же существует таких чисел? Очевидно, что наибольшая первая цифра не меньше 2, и с двойки начинается два числа: 210 и 201. Чисел с первой цифрой 3 будет 3·2 (столько же, сколько двузначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 0, 1 и 2). Чисел с первой цифрой 4 будет 4·3, и так далее. Чисел с первой цифрой 9 будет 9·8 (столько можно составить двузначных чисел с различными цифрами из 9 цифр 0,1,..8). Итак, всего трехзначных чисел с разными цифрами, у которых первая цифра – самая большая, существует 1·2+2·3+3·4+...+8·9.

Итак, решая задачу, мы заодно выяснили, что $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+8\cdot 9 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3}$.

Подчеркнем еще раз основную идею, которую мы использовали в первом решении: мы объединили в один класс все трехзначные числа с разными цифрами, полученные перестановкой цифр "по кругу"

(870, 708 и 087), и должны были посчитать число таких классов. Для этого общее количество чисел (10·9·8) мы разделили на количество чисел, попавших в один класс (на 3).

Во втором решении мы выбрали по одному "представителю" в каждом классе (числу с наибольшей первой цифрой) и посчитали число таких "представителей".

Приблизительно те же идеи мы использовали в решениях первых задач в § 2.

Задача 4-7. Найдите суммы:

а) 1·2·3 + 2·3·4 + ... + 7·8·9;

б) 1·2·3·4·5 + 2·3·4·5·6 + ... + 5·6·7·8·9.

в) Сколькими способами можно расставить пять цифр по кругу (две расстановки, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми)?

Задача 4-8. Сколько существует K – значных чисел, у которых все цифры разные и первая цифра – самая большая ($K = 1,2,\ldots 9$)?

Указание к задаче 4-8. При K =1 нужно взять все 10 однозначных чисел: 0,1,....,9. При K = 2 – все числа с убывающим порядком цифр (см.задачу 2-0); при K = 3, как мы убедились в решении задачи 4-6, нужных чисел $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3} = 240$.

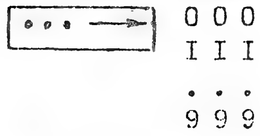
Ответ: $K = 1$ – 10; $K = 2$ – 45;
$K = 3$ – 240; $K = 4$ – ?

.....

Задача 4-9. Сколько существует K – значных чисел с невозрастающим порядком цифр?

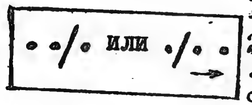
Указание к задаче 4-9. Для $K = 2$ мы эту задачу решили в § 2 (задача 2-0). Для $K = 3$ можно рассуждать так.

Поставим три точки, разобъем их черточками на группы (как в решении задачи 4-3), а затем в каждой группе напишем какую-то одну цифру, причем в следующей группе – меньшую цифру, чем в предыдущей. Если группа одна, то во всех трех точках напишем одну и ту же цифру – получим 10 чисел



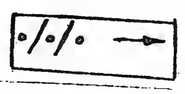
Если группы две (разбить 3 на две группы можно 2 способами), то в

них можно написать цифры любого двузначного числа с убывающим порядком цифр (всего таких чисел 45),



II0		I00
220	или	200
...		...
998		988

Так мы получим еще 2·45=90 чисел. Наконец, если разбить 3 на 3 группы и в каждой написать по цифре, то получим еще $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}$ = 120 чисел с убывающим порядком цифр



321
...
987

Итак, всего при K = 3 получается 10+90+120=220 чисел. Продолжите наши рассуждения и напишите

Ответ: $K = 1$ – 10,
$K = 2$ – 45,
$K = 3$ – 220,
.....

Заключение.

В § 2-4, мы, в основном, имели дело с примерами, когда "основное множество", из которого черпали элементы и их комбинации, состояло из цифр, то есть содержало 10 элементов. Конечно, аналогичные задачи можно решать и для множества из любого числа элементов (и кое-где мы с этим уже сталкивались):

Скажем, найти число разбиений числа n на K слагаемых, или число расстановок n чисел (от 1 до n) по кругу, или коэффициенты разложения $(a+b)^n$ в сумму членов $a^k b^{n-k}$, или сумму чисел

$$1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\cdot K + 2\cdot 3\cdot 4\ \ldots\cdot (K+1) + \ldots + (n-K+1)(n-K+2)\ldots n$$

Во многих более общих задачах принципы рассуждения и даже вид формул, получающихся в ответе те же самые, что и в задачах, которые мы рассмотрели. Некоторые подобные задачи встретятся Вам и в § 5.

Часто встречающиеся в комбинаторике и других областях математики числа имеют специальные названия и обозначения.

1) Произведение всех натуральных чисел от 1 до некоторого m, то есть число $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m$ обозначается через $m!$ (читается "m-факториал") или через P_m и называется числом перестановок из m элементов. При этом по определению считают, что 0! = 1! = 1.

2) Произведение m натуральных чисел, идущих подряд в порядке убывания, начиная с некоторого n, то есть число

$$n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-m+1) \quad (m \text{ сомножителей})$$

обозначается через A_n^m и называется числом размещений из n по m. При этом $A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$.

3) Отношение двух указанных выше произведений, то есть число $\frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m}$

обозначается через C_n^m или через $\binom{m}{n}$ и называется биномиальным коэффициентом или числом сочетаний из n по m. При этом

$$C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{Am}{P_n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Дальнейшее знакомство с комбинаторикой и ее приложениями (в частности, к теории вероятностей) Вы можете продолжить, например, по книгам:

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.:Физматлит, 1969.

2. Успенский В.А. Треугольник Паскаля. – М.: Наука, 1979. (Серия "Популярные лекции по математике").

3. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1982. (Серия "Библиотечка "Квант").

4. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.

§ 5. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

В §§ I – 4 мы познакомились с несколькими приемами решения комбинаторных задач. Мы не раз убеждались в том, насколько важно уточнить формулировку задачи, перевести ее на тот язык, на котором удобно ее решать и писать решение.

Следующие задачи лишь частично связаны с предыдущими – к каждой из них требуется свой подход. К некоторым задачам приведены указания, но вы можете, разумеется, идти своим путем.

Задача 5-I. Сколькими способами можно распределить два билета в театр среди четырех людей?

Уточнение. Заметим, что вопрос поставлен неточно. В самом деле, неясно:

а) может ли один человек получить оба билета (пойти в театр с женой);

б) считаем ли мы оба билета одинаковыми или нет (может быть это билеты на соседние места, а может быть, один – в партер, а другой – на балкон)?

На каждый из этих вопросов можно ответить и так, и этак. От этого будет зависеть результат задачи. Поэтому рассмотрите разные случаи и приведите соответствующие ответы.

Задача 5-2. Элементами множеств A, B и C служат числа I, 2, 3, 4,..., 9. Известно следующее:

$$A \cap B = \{1;2\}\ ;\ A \cup B = \{1;2;3;6;7;8\}\ ;$$
$$B \cap C = \{3;7\}\ ;\ A \cup C = \{1;2;3;4;5;7;9\}\ .$$

Найдите множества A, B и C.

Ответ: $A=\{1;2\}$; $B=\{1,2,3,6,7,8\}$; $C=\{3,4,5,7,9\}$.

Решение. В этой задаче можно рассуждать о каждом числе отдельно, фактически решая 9 независимых задач.

I) Начнем с числа I. Поскольку I принадлежит пересечению A и B, то I принадлежит обоим множествам, A и B. Если бы I принадлежала еще и C, то I принадлежала бы пересечению B и C, а это не так. Значит, I не принадлежит C.

2) Число 2 входит ровно в те же множества, что и I. Поэтому для 2 проходит то же рассуждение.

3) Число 3 входит в $B \cap C$, поэтому 3 входит и в B, и в C.

Но 3 не входит в $A \cap B$, поэтому 3 не входит в A.

4) Число 4 не входит в $A \cup B$, поэтому оно не входит ни в A, ни в B. Но оно входит в $B \cup C$, поэтому оно входит только в C.

5) Для 5, 6, 8, 9 те же рассуждения, что и для 4.

6) Для 7 те же рассуждения, что и для 3.

Замечание. Если Вы хорошо разобрались в приведенном решении, Вам легко будет понять, что решение можно записать и гораздо короче.

I) Так как множества $A \cap B$ и $B \cap C$ не имеют общих элементов, то нет такого элемента, который принадлежал бы одновременно всем трем множествам, A, B и C. Отсюда следует, что числа I, 2 принадлежат и A, и B, но не принадлежат C, а числа 3 и 7 принадлежат и B, и C, но не принадлежат A.

2) Если элемент не принадлежит $K \cup Z$, то он не принадлежит ни K, ни Z, а если он одновременно принадлежит $K \cup M$, то он принадлежит M. Отсюда следует, что числа 6 и 8 принадлежат B, но не принадлежат ни A, ни C, а числа 4, 5, 9 принадлежат C, но не принадлежат ни A, ни B.

Задача 5-3. Какие из чисел I, 2, 3,..., 9 входят в множества A, B, C, D, если известно следующее:

$A \cup B = \{1,2,3,5,6,8,9\}$; $A \cap C = \{8\}$; $A \cup D = \{1,2,5,7,8,9\}$;

$A \cap D = \{2,5,9\}$; $B \cup C = \{3,4,5,6,7,8,9\}$; $B \cap C = \{6\}$?

Задача 5-4. Четыре девочки: Катя, Лена, Маша и Нина – участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен – больше, чем все остальные, а Лена – 5 песен – меньше, чем все остальные. Сколько песен было спето?

Ответ: 9 песен.

Решение. Вообразим, что каждой девочке за исполнение каждой песни давали фантик. Тогда Катя получила 8 фантиков, а Лена – 5 фантиков. Маша получила 6 или 7 фантиков, Нина – тоже. Все вместе получили не меньше, чем 5 + 6+ 6 + 8 = 25 и не больше, чем 5 + 7 + 7 + 8 = 27 фантиков. За каждую песню раздавали по три фантика. Значит, чтобы получить число песен, надо общее число фантиков разделить на три. Но из трех возможных значений для числа фантиков – 25, 26, 27 – только 27 делится на три. Полу-

чается при этом 9. Конкретное "расписание" отдыха девочек может быть любым, лишь бы Катя отдыхала I раз, Лена - 4 раза, а Маша и Нина - по 2 раза.

Задача 5-5. Пятеро друзей: Витя, Нина, Лариса, Коля и Поля, играли в прятки. Игра проходила в несколько туров. Каждый тур начинался с того, что четверо друзей прятались в разные места, а пятый их искал - "водил". Как только водящий находил кого-то из спрятавшихся друзей, тур кончался. В следующем туре водил тот, кого нашли в предыдущем. Сколько раз водил Коля, если он больше всех - II раз - не был водящим, а меньше всех - 8 раз - не была водящей Нина ?

Задача 5-6 а). Имеются 6 точек. Каждая пара из них соединена либо синей дугой, либо красной. Всегда ли можно выбрать из этих точек такие три, что все дуги, соединяющие их друг с другом, будут одного цвета ?

б) Тот же вопрос для 5 точек.

Задача 5-7. Пусть каждая пара из 6 точек соединена красной или синей дугой. Всегда ли можно найти два треугольника, образованные дугами одного цвета (разрешается, чтобы эти два треугольника имели общую дугу) ?

Задача 5-8. В компании из 6 человек некоторые знакомы друг с другом. Докажите, что в этой компании либо 3 незнакомых друг с другом человека, либо попарно знакомых.

Задача 5-9. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (в нем 33 буквы) и четырех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин ?

Задача 5-I0. На рояле - 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков ?

Задача 5-II. Сколько шестизначных чисел делится на 5 ?

Задача 5-I2. Сколькими способами можно разложить 7 разных монет в три кармана ?

Задача 5-I3. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5 ?

Задача 5-I4. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу ?

Задача 5-I5. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр ?

Задача 5-I6. На клетчатой бумаге со стороной клетки I см нарисована окружность радиуса I00 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность ?

Задача 5-I7. Сколькими способами можно расставить в ряд числа I, 2, 3,..., n так, чтобы числа I, 2, 3 попали рядом и притом шли в порядке возрастания ?

Задача 5-I8 а). Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр I, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую из них можно использовать любое число раз ?

б) Тот же вопрос, но с условием, что каждую цифру можно использовать не более одного раза.

Задача 5-I9. Каждая из вершин шестиугольника раскрашивается в один из трех цветов так, чтобы две соседние вершины не оказались раскрашенными в один цвет. Сколько есть способов такой раскраски ?

Задача 5-20. Сколькими способами можно составить ожерелье из 6 бусинок, из которых 2 черных, а 4 - зеленых (ожерелья, получающиеся передвижением бусинок по кругу, считаются одинаковыми) ?

Задача 5-2I. Мама каждый день выдает сыну на десерт по одному фрукту. У нее есть три одинаковых яблока, 5 одинаковых груш, 2 одинаковых персика и I апельсин. Сколькими способами она может ему выдать эти фрукты в течение II дней ?

Задача 5-22. Сколькими способами 20 одинаковых монет можно разложить в три кармана, так, чтобы в каждом лежало не менее двух монет ?

Задача 5-23. Из слова РОТ перестановками букв можно получить еще такие слова: ТОР, ОРТ, ОТР, ТРО, РТО. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слов:

а) ЛОГАРИФМ ; б) РЕЕСТР ?

Задача 5-24. Из троих людей одному надо сделать неприятную работу. Его выбирают "морским счетом" – каждый показывает какое-либо число пальцев от одного до пяти, находится сумма показанных трех чисел и затем считают, начиная с одного из участников, подряд от I до того числа, которое получилось в сумме. Докажите, что не все положения участников равноправны. Каким быть выгоднее: тем, с кого начинается счет, вторым или третьим ?

Наметим решение задачи 3-7 а) и б) способом, отличным от данного в указании на стр.25.

Пусть для каждого человека A через M_A обозначается множество его знакомых, через N_A – множество не знакомых с A. Тогда каждому элементу из N_A можно поставить в соответствие пару элементов из M_A (тех, с кем он знаком), и нетрудно доказать, что это соответствие между множеством N_A и множеством всевозможных пар элементов M_A будет взаимнооднозначным. Следовательно, если в M_A содержится m_A элементов, то в N_A их $\frac{m_A(m_A-1)}{2}$, а всего в компании $n = 1+m_A+\frac{m_A(m_A-1)}{2}$ людей. Это равенство верно для любого человека A. Но уравнение $n = 1+x+\frac{x(x-1)}{2}$ имеет (при $n>1$) только один положительный корень, следовательно, m_A одно и то же для всех A (аналогичное решение разобрано в книге А.Лемана "Сборник задач московских математических олимпиад", задача XXIII, II, IO, 3) – Москва, изд. "Просвещение", I965г.).

Интересно выяснить, при каких n такие компании действительно существуют. Полного ответа на этот вопрос мы не знаем. Мы видели, что $n = \frac{m(m+1)}{2}+1$, где m – количество знакомых одного человека, но не при любом n существует нужная компания. Например, нетрудно доказать, что таких компаний не существует при $m=3$, $m=4$ и вообще при $m=4k+3$. Кроме очевидных примеров таких компаний – для $m=1$, $n=2$ и $m=2$, $n=4$ – мы знаем только один: $m=5$, $n=16$.

Эту конфигурацию из I6 точек и 40 отрезков можно описать так: множество вершин, ребер и больших диагоналей четырехмерного куба*). Изобразить данную конфигурацию с помощью точек и соединяющих их дуг – это и значит решить задачу 3-7 б).

*) О четырехмерном кубе см., например, в книге "Метод координат" И.М.Гельфанда, Е.Г.Глаголевой, и А.А.Кириллова, М., изд. "Наука", I965г.

Построить эту схему можно следующим образом. Возьмем I6 точек и разобьем их на 4 группы по 4 точки в каждой; точку занумеруем парой индексов $(a;b)$, где a – номер группы, b – номер точки в группе; a и b могут принимать значения I, 2, 3, 4. Будем проводить дуги так:

I) в каждой группе соединим первую точку со второй, вторую – с третьей, третью – с четвертой, четвертую – с первой;

2) соединим теперь точки: (I,I)–(2,2)–(3,3)–(4,4)–(I,I)
(I,4)–(2,I)–(3,2)–(4,3)–(I,4)
(I,3)–(2,4)–(3,I)–(4,2)–(I,3)
(I,2)–(2,3)–(3,4)–(4,I)–(I,2);

3) наконец, соединим каждую точку с индексом (I,b) с соответствующей точкой (3,b) и каждую точку (2,b) с соответствующей точкой (4,b).

Полученная схема, как легко проверить, удовлетворяет условию задачи (см.рис. 23).

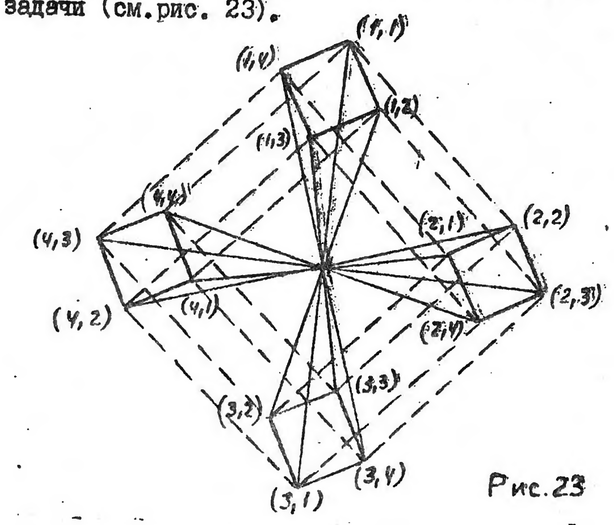


Рис.23

Задача 5-25 (Н.Бурбаки). В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для каждых двух элементов из E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента.

а) Докажите, что $m \geqslant n$.

б) В каких случаях возможно равенство $m=n$ (это пока никому не известно) ?

Контрольные задания

Задание №

Внимательно, с карандашом в руке, разберитесь в идеях, решениях задач и комментариях к ним в § I, 2, а также в решении задачи № 5-2 из § 5. Для решения дополнительной задачи № 5-5 полезно разобраться в решении задачи № 5-4.

Обязательные задачи

I. № I-I г)	2. № I-3 а)	3. № I-3 б)
4. № I-3 в)	7. № I-5	I0. № 2-7
5. № I-3 г)	8. № I-7 а)	II. № 2-8
6. № I-3 д)	9. № 2-6	I2. № 5-3

Дополнительные задачи

I3. № I-I4 б)	I5. № 2-I3 а)	I7. № 5-I
I4. № I-I4 в)	I6. № 2-I4	I8. № 5-5

Срок присылки задания №

Задание №

Разберите остальной материал. Если Вы хотите решать дополнительные задачи, разберите решения задач, приведенные в §§ 4 и 5.

Обязательные задачи

I. № 3-5 а)	5. № 3-6 б)	9. № 4-4
2. № 3-5 б)	6. № 3-6 в)	I0. № 4-5 а)
3. № 3-5 в)	7. № 3-8 а)	II. № 4-7 а)
4. № 3-6 а)	8. № 4-I а)	I2. № 5-II.

Дополнительные задачи

I3. № 4-2 б)	I5. № 5-6 б)	I7. № 5-I8 б)
I4. № 5-6 а)	I6. № 5-I8 а)	I8. № 5-23 б).

Срок присылки задания №

Критерии оценок

В таблице указано, сколько задач достаточно решить для получения соответствующей оценки по каждому заданию.

№	Обязательные задачи			Дополнительные задачи	
	зачет	4	5	4	5
	6 - 7	8 - I0	II - I2	3 - 4	5 - 6